

Bankenagel J. u. Spiegel W. (Hrsg.)

in: Mathematikdidaktik aus Begeisterung  
für die Mathematik. Festschrift für  
Harald Scheid. Stuttgart, Düsseldorf, Leipzig: 4erl. 2000

Hartmut Spiegel & Ruth Kördel, Paderborn

## „Was müssen sich die Kinder gegenseitig noch bezahlen?“ Die Schwierigkeiten von Kindern verstehen lernen am Beispiel einer Sachaufgabe

### 1. Einleitung

Wer Schulbuchwerke produziert und herausgibt — wie Harald Scheid, dem wir diesen Text zu seinem 60. Geburtstag widmen — für den ist es nichts Neues, dass Aufgaben, die man selbst für relativ eindeutig hält, von Kindern häufig anders gelöst werden als erwartet. Dass trotz der unterstellten Eindeutigkeit solche unerwarteten Reaktionen nicht „Schuld“ der Kinder sind, sondern in der Aufgabe selbst begründet sein können, erschliesst sich nicht immer auf den ersten Blick. Für zukünftige Lehrerinnen ist es daher lehrreich, wenn sie an konkreten Beispielen Erfahrungen dazu sammeln können, welche vielfältigen Interpretationsspielräume Aufgaben haben. Im folgenden wollen wir über die Analyse einer solchen Aufgabe im Rahmen der Lehrerbildung berichten.

### 2. Die Aufgabe

Die Aufgabe entstammt einem Aufgabenpool aus einer frühen Phase des Projekts AMI. AMI (Applying Mathematics International) ist ein Forschungsprojekt zur Entwicklung und Durchführung eines länderübergreifenden schriftlichen Vergleichstests für Schüler des 4. Schuljahres hinsichtlich ihrer Fähigkeiten im Anwenden von Mathematik (Näheres in: SELTER 1999). Im Anfangsstadium von AMI wurde zunächst eine grosse Bandbreite von Aufgaben in den Blick genommen, ohne dass sofort an jede Aufgabe und die dazugehörigen Auswertungskriterien mit der nötigen Detailschärfe gedacht wurden. Einige davon wurden im Rahmen eines Forschungsprojektes an der Universität-GH Paderborn von Ruth Kördel mit Hilfe klinischer Interviews getestet. Die nachfolgend wiedergegebene Aufgabe wurde später aus Gründen, die sich auch in unserer Analyse zeigen werden, aus dem Test herausgenommen, und kann daher hier vorgestellt und diskutiert werden.

### Der Ausflug

Nicole, Abdul und Mark haben einen Ausflug gemacht.

Sie sind mit dem Bus in einen Freizeitpark gefahren.

Nicole bezahlte die Bus-Fahrkarten. Für jedes Kind bezahlte sie 2 DM.

Abdul bezahlte die Eintrittskarten für den Freizeitpark, für jedes Kind 8 DM.

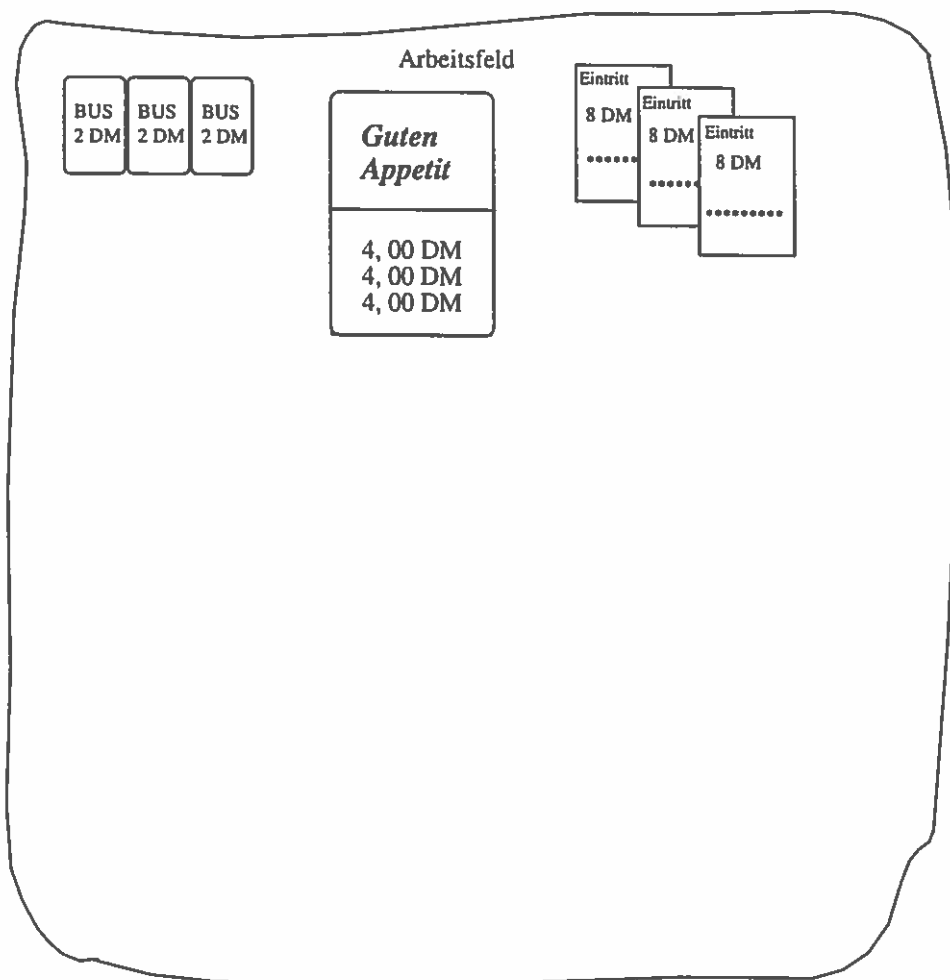
Zum Mittagessen gab es Hamburger. Mark bezahlte 4 DM für jedes Kind.

Am Abend rechnen Nicole, Abdul und Mark aus, was jeder von ihnen noch bezahlen muss.

Auch du sollst jetzt versuchen, das herauszufinden.

Wieviel müssen sie sich gegenseitig noch bezahlen?

Achte darauf, dass alle Kosten gerecht geteilt werden..  
Schreibe übersichtlich auf, was die Kinder sich gegenseitig noch bezahlen müssen.



Wenn Sie es nicht schon getan haben, dann lösen Sie vor dem Weiterlesen die Aufgabe bitte so, wie Sie meinen, dass es den Erwartungen der Aufgabensteller entspricht — ggf. auf mehrere mögliche Arten. Dann überlegen Sie sich außerdem, welche Reaktionen, Bearbeitungen und Antworten von Kindern zu dieser Aufgabe Sie noch für denkbar halten.

### 3. Wie Erwachsene die Aufgabe lösen

Erwachsene werden im Allgemeinen die Situation und das damit verbundene Problem des finanziellen Ausgleichs ohne große Mühe verstehen und — nach mehr oder weniger langem Nachdenken — auch korrekt lösen. Es reichen z.B. die Rechnungen:  $3 \times 2 = 6$ ;  $3 \times 8 = 24$ ;  $3 \times 4 = 12$  (zur Beantwortung der Frage: Wieviel hat jeder bezahlt?), die Rechnung  $2+8+4 = 14$  (zur Beantwortung der Frage: Wieviel muss jeder bezahlen?) sowie die Lösungen von  $6 + x = 14$  und  $12 + x = 14$ . Abdul bekommt 8 DM von Nicole und 2 DM von Mark. Soweit zu einem der möglichen Lösungswege.

Studierende in einer Seminarveranstaltung, denen diese Aufgabe vorgelegt wurde, kamen auch zu dieser Lösung. Manche erst nach einer „Schrecksekunde“ — erklärbar vielleicht dadurch, dass ihnen kein vorher erlerntes Schema zur Lösung der Aufgabe zur Verfügung stand. Mehrheitlich verwendeten sie dabei aber einen leicht abweichenden Weg, um zu ermitteln, dass jeder 14 DM bezahlen muss. Sie addierten die Zahlen 6, 14 und 12 und teilten die Summe durch 3. Die Studierenden waren aber nicht in der Lage darüber hinausgehende Vorstellungen dazu zu entwickeln, wie Kinder die Aufgabe auffassen und welche Lösungswege sie gehen.

### 4. Analyse der Aufgabe im Hinblick auf weitere mögliche Lösungen

Eine Möglichkeit die Aufforderung: „Schreibe übersichtlich auf, was sich die Kinder gegenseitig noch bezahlen müssen“, zu befolgen, ist zum Beispiel:

	Nicole (Bus)	Abdul (Eintr.)	Mark (Essen)
Nicole	-	8	4
Abdul	2	-	4
Mark	2	8	-

Diese Tabelle ist so zu lesen, Nicole zahlt an Abdul 8 DM etc. Es entstehen also 6 Zahlungsvorgänge, bei denen jeder dem anderen zahlt, was der für ihn ausgelegt hat. Gerechnet wird bei dieser Reaktion auf die o.a. Aufforderung nicht. Trotzdem sollte sie als Lösung der Aufgabe akzeptiert werden — es liegt im Bereich des Möglichen, dass Kinder so reagieren.

Nun enthält die Aufgabe ja noch andere Formulierungen, z.B. „wieviel müssen sie sich gegenseitig noch bezahlen?“. Je nachdem wie man die Frage versteht, gibt es darauf mindestens 4 verschiedene Antworten.

- Deutet man sie im Sinne der auch im Aufgabentext zu findenden Formulierung, was jeder von ihnen noch bezahlen muss?, kann die Antwort lauten: Nicole 12 DM, Abdul 6 DM, Mark 4 DM. Diese Antwort ergibt sich, wenn für jedes Kind die Beträge addiert werden, die es an die beiden anderen zahlen muss.
- Man kann die Frage aber auch als Frage nach einer einzelnen Zahl, nämlich der Summe aller Zahlungen verstehen. Die Antwort wäre dann: 28 DM müssen sie sich gegenseitig noch bezahlen.
- Schließlich können die 6 Zahlungsvorgänge auch auf 3 reduziert werden, was dem direkten Ausgleich zwischen den 3 möglichen Paaren entspricht. Dann lautet die Antwort: Nicole zahlt 6 DM an Abdul, Nicole zahlt 2 DM an Mark, Mark zahlt 4 DM an Abdul.
- Die vierte Antwort ist diejenige, die in drittens als erstes erwähnt wurde: Der „Umweg“ der 2 DM von Nicole über Mark an Abdul wird abgekürzt, so dass Nicole 8 DM an Abdul zahlt und Mark 2 DM an Abdul.

Summa summarum haben wir bis jetzt fünf mögliche korrekte Lösungen. Überrascht Sie das?

### 5. „Das krieg’ ich irgendwie nicht raus“

Anlass für die Analyse war die Frage (auf die es zunächst keine Antwort gab) ob und wie Kinder auf diese Aufgaben anders reagieren als Erwachsene. Eine Hilfe stellte dabei die Aufforderung dar, sprachliche Formulierungen in der Aufgabenstellung genauer unter die Lupe zu nehmen (gem. dem Motto „Lies noch mal genau!“). Das Ergebnis — 5 verschiedene Antworten, die alle nicht falsch sind — war für die Seminarteilnehmerinnen sehr überraschend. Dass das aber nicht nur graue Theorie war, sondern bei Kindern tatsächlich zu beobachten ist, ergab die Betrachtung eines Interviewausschnittes, dessen Transkript wir nachfolgend wiedergeben:

Ruth

R: (...) ...Äh, der Abdul und der Mark müssen der Nicole noch ... zw ... nee ... nee ... dann musste 2 DM plus 8 DM und dann plus 4 DM rechnen. Das sind 14 DM.

I: Mhm.

R: Und die geteilt durch 3 das sind ... nee, das geht nicht ... hm ... (10 sec) nee, der Abdul und der Mark müssen der Nicole noch jeder 2 Mark für den Bus zurückgeben. Das sind dann 4 Mark.

I: Mhm.

R: Die hat sie dann zurückgekriegt. Und dann muss die ... müssen ... muss die Nicole und ... der Mark dem Abdul noch jeder 8 Mark für die Eintrittskarte geben. Das sind dann 16 Mark ... und ... die Nicole und der Abdul die müssen jeder noch dem Mark 4 Mark für das ... für den Hamburger ausge ... äh geben ... und dann ... (17 sec)(R. zählt leise) dann muss jeder ... 6 DM ab ... abgeben. Äh.

I: Hm ... (7 sec) Das musst du mir erklären, wie du darauf gekommen bist.

R: *Nee, der ... die Nicole, die muss ... ähm ... die muss zusammen ... 12 DM abgeben ... und der Abdul der muss zusammen ... hm ... (6 sec) 10 Mark abgeben und der Mark ... der muss ... ach nee, der Abdul der muss ähm ... 6 DM abgeben und der Mark der muss 10 DM abgeben ... und dann rechne ... 12 plus 10 ... nee ... hm ... (9 sec) Dann muss jeder ... (23 sec) 10 Mark abgeben, weil ... nee ...*

I: Schreib dir vielleicht mal auf, was du jetzt schon weißt.

(...)

R: (...) (R. zählt leise, liest Aufgabenstellung nochmal leise) *Hm, das krieg ich irgendwie nicht raus.*

I: Wo hakt's?

R: *Ja, ich krieg das nicht raus, weil die müssen ja jeder das gleiche bezahlen, die wollen das ja gerecht machen. Da steht ja: Achte darauf, dass die Kosten gerecht geteilt werden.*

I. Mhm. Schreibe dir nochmal auf, wer schon wieviel bezahlt hat ... (43 sec) (R. schreibt ins Arbeitsfeld)

R: *Ja.*

I: Mhm. Und jetzt musst du gucken, dass am Ende des Tages die Kinder gleichviel bezahlt haben ... (7 sec)

R: *Jeder ha ... jeder bezahlt 12 Mark, weil ... die ... Hälfte von v ... von 24 ist 12 ... und ... dann hat der Abdul ... hm ... ja ... also 6 plus 6 ist ja 12 ... und von 12 bis 24 ist auch 12 und die haben ... also weil der Abdul, der hat ja das meiste bezahlt ... und ... nee ... (42 sec) (R. spielt mit dem Stift, liest die Aufgabe nochmal) Ich krieg das immer noch nicht raus.*

I: Überleg dir mal, wieviel jedes Kind für den ganzen Tag bezahlen muss ... (6 sec) Wieviel hat der Tag pro Kind gekostet?

R: *14 DM.*

I: Mhm. Schreib das auch mal auf ... (R. schreibt) Was weißt du jetzt, was hast du dir da aufgeschrieben?

R: *Jedes Kind ... da kommt 14 DM raus. Weil die Nicole muss 2 Mark für den Bus bezahlen, der Abdul muss 2 Mark für den Bus bezahlen und der Mark muss 2 Mark für den Bus bezahlen. (R. zeigt dabei auf die jeweilige Textstelle)*

I. Mhm.

R: *Und ... da müssen die alle drei noch 4 Mark für das Essen bezahlen und alle drei 4 Mark für die ... äh 8 Mark für die Eintrittskarten. Und 2 plus 4 ist 6 und plus 8 ist 14.* (R. zeigt auf die entsprechenden Text- und Rechnungsstellen)

I: Mhm. Jetzt weißt du, wieviel jedes Kind pro ... an dem Tag bezahlen musste.

(...)

R: *Ja, die Nicole die hat 2 Mark für den Bus bezahlt.*

I: Mhm.

R: *Und die muss noch 12 Mark ab, abgeben. Und 12 plus 2 sind 14. Und der Abdul, der muss noch 6 Mark bezahlen. Hat selber 8 Mark be ... ach nee, dann haste ja wieder das, was die am Tag bezahlt haben ... Ja, dann haste* (R. guckt erstaunt) *... ja das, was jeder an dem Tag bezahlen muss.*

I: Ja. Und was stört dich daran?

R: *Nee, die Lösung ist 14 DM ...*

I: Auf die Frage: Wieviel müssen sie sich gegenseitig noch bezahlen?

R: *Ah, nee ... die müssen ... sich gegenseitig ... noch ... 28 Mark bezahlen.*

I: Wie bist du darauf jetzt gekommen?

R: *Ich hab die 12 plus die 6 gezählt und plus die 10, das sind 28. (...)*

Aus dem Transkript lässt sich eine Menge darüber lernen, wo bei Kindern, die dieses Problem auf der praktischen Ebene mühelos zu lösen imstande wären, Schwierigkeiten auftreten. Diese Schwierigkeiten sind nicht nur in der Sache begründet, sondern können auch durch sprachliche Formulierungen ausgelöst werden oder durch Antworterwartungen, die das Kind dem Aufgabensteller unterstellt. Ruth's durchgängiges Motiv scheint zu sein, *die eine richtige Ergebniszahl zu finden*, von der sie meint, dass sie als Antwort erwartet wird. Das wird schon ganz am Anfang sichtbar, wo sie einen vielversprechenden Start selbst unterbricht,  $2 + 4 + 8 = 14$  rechnet und einen Neubeginn macht, weil 14 nicht durch 3 teilbar ist. Anschließend nennt sie korrekt die 6 notwendigen Zahlungsvorgänge, lässt das aber selbst nicht als Ergebnis gelten, sondern versucht wieder auf eine Zahl zu kommen. (Vielleicht kommt die 6 dadurch zustande, dass sie statt 28 versehentlich 18 durch 3 teilt.) Im nächsten Anlauf produziert sie zunächst eine weitere korrekte Lösung auf die Frage, was jeder noch bezahlen muss. Nicole 12 DM, Abdul 6 DM, Mark 10 DM, die Summe der an die anderen zu zahlenden Beträge. Darum macht sie dann 10 DM als Betrag, den jeder noch bezahlen muss — vielleicht als Näherung für  $28 : 3$ . Im folgenden wird klar, wo ihr Problem liegt: „Gerechtes Teilen der Kosten“ bedeutet für sie, dass von jedem ein Ausgleichsbetrag aufzubringen ist und dieser Betrag aber für jeden gleich sein muss.

In der Kommentierung überschlagen wir nun das Weitere und weisen nur noch darauf hin, dass Ruth am Ende auch die 28 als Lösung anbietet. Insgesamt produziert das Kind während

des Dialoges drei der fünf Lösungen, die in der Analyse bearbeitet wurden. Wir wissen zwar nicht, was Ruth geschrieben hätte, wenn ihr diese Aufgabe in einem schriftlichen Test vorgelegt worden wäre, befürchten aber, dass das etwas gewesen wäre, was nicht als richtig gegolten hätte. Das zeigt auch, wie schwierig es ist, Bedingungen herzustellen, bei denen mit geringem Aufwand die tatsächliche Leistungsfähigkeit von Kindern adäquat erhoben werden kann.

## 6. Reflexion

Die Schwierigkeiten von Kindern verstehen lernen am Beispiel einer Sachaufgabe — davon sollte dieser Text handeln. Im Rückblick wollen wir nun herausheben, worin der Ertrag dieser intensiven Auseinandersetzung mit einer Aufgabe bestand.

Zunächst löste die Frage nach unterschiedlichen Möglichkeiten, wie Kinder die Aufgabe auffassen und welche Lösungswege sie gehen, bei den Seminarteilnehmerinnen Unverständnis aus — die Aufgabe schien doch klar umrissen, die Situation von den Schülern verstehbar. Das gemeinsame Erarbeiten möglicher Lösungswege — unterstützt durch die genaue Betrachtung der Aufgabenstellung und einzelner Formulierungen — führte dann zu klareren Vorstellungen darüber, wo für Schüler Probleme bei dieser Aufgabe auftauchen können. Es zeigt sich, dass die verschiedenen Fragestellungen des Aufgabentextes unterschiedlich interpretiert werden konnten und damit nicht leicht auf einen Nenner zu bringen waren. Das Betrachten des Videobeispiels (vgl. Transkript) führte zu den bedeutsamen Erfahrungen,

- dass die vorgängige Sachanalyse und die damit verbundenen Überlegungen zu möglichen Lösungswegen ein sehr viel besseres Verständnis des Kindes ermöglichen,
- dass die vermuteten Schwierigkeiten auch tatsächlich zu beobachten sind und
- dass eine schriftliche Bearbeitung der Aufgabe sehr viel weniger Einblick in die tatsächlichen Fähigkeiten des Kindes gewährt hätte.

Damit war der Lernprozess der Teilnehmerinnen aber noch nicht zu Ende. Sie stellten sich hochmotiviert der Anforderung, Aufgabentexte zur gleichen Situation zu schreiben, die weniger Schwierigkeiten erwarten ließen. Dabei kamen sie zum Ergebnis — insbesondere beim Vergleich ihrer einzelnen Vorschläge — dass es zwar bessere als die untersuchte Formulierung gibt, aber keine geben kann, die sinnvoll und „childproof“ — also geschützt gegen abweichendes Verständnis von Kindern ist.

Der Ertrag hat u.E. den Aufwand gerechtfertigt. Für die zukünftigen Lehrerinnen schien sich regelrecht eine neue Welt hinter einer „einfachen“ Textaufgabe aufzutun. Sie waren sich vorher offensichtlich nicht bewusst über Schwierigkeiten und Interpretationsmöglichkeiten der Kinder. Nach und nach erhöhte sich bei den Seminarteilnehmerinnen die Sensibilität für Lösungswege von Kindern, was sich bei der Arbeit an weiteren Beispielen aus SELTER & SPIEGEL 1997 zeigte.

## Literatur

Selter, Chr. (1999): Applying Mathematics International — Eine Pilotstudie zum Anwenden von Mathematik. Vortragsmanuskript für einen Vortrag auf der 33. Bundestagung für Didaktik der Mathematik, Bern. (erscheint in: Sache-Wort-Zahl)

Selter, Chr. & Spiegel, H. (1997): Wie Kinder rechnen. Stuttgart, Klett